



Modelo Elétrico de Linhas de Transmissão

Modelo PI

Helon David de Macêdo Braz
helon@cear.ufpb.br



Como foi apresentado até agora, uma linha de transmissão possui uma impedância série z_1 e uma admitância em derivação y_1 .

As unidades são, respectivamente, Ω/km e S/km .

O subscrito 1 indica que esses parâmetros se referem a sequência positiva, pois nosso interesse é pela representação da LT supondo operação equilibrada.

Nesse caso, a linha continua sendo trifásica mas sua solução é obtida a partir de um circuito monofásico.

Lembrete:

- A impedância série z_1 modela a resistência da linha e sua reatância série.
- A admitância em derivação y_1 modela a susceptância da linha em derivação.

São parâmetros independentes com origens físicas independentes!



Rigorosamente, o fato de z_1 e y_1 serem distribuídos ao longo das LTs impediria fazer simplesmente: $Z_1 = z_1 L_{km}$ e $Y_1 = y_1 L_{km}$.

Sendo:

Z_1 a impedância total de sequência positiva da LT;

Y_1 a admitância total de sequência positiva da LT; e

L_{km} o comprimento considerado, em km.

Porém, o **comprimento** é quem determina como devemos proceder para modelar corretamente LTs.

A recomendação é modelar as LTs como Curtas, Médias e Longas.

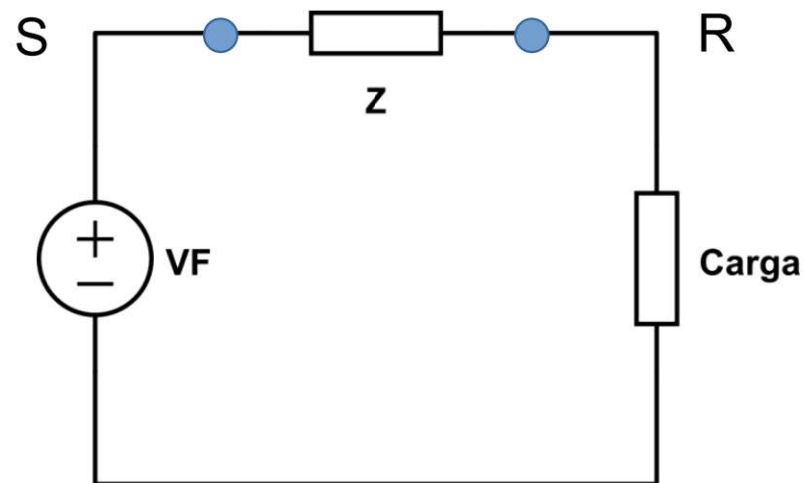
O comprimento exato usado para separar essas categorias depende do autor de referência.

O fato é que o modelo mais preciso é aquele adotado para as Linhas de Transmissão Longas, enquanto LTs Curtas e Médias permitem que simplificações sejam feitas.



Linha Curta ($L_{km} < 80$ km)

Considere S como o terminal da fonte e R como o terminal da carga:



Definindo I_S como a corrente injetada no terminal S e I_R como a corrente que supre a carga, saindo do terminal R, podemos escrever para a LT Curta:

$$I_S = I_R = I$$

$$V_S = V_R + ZI$$

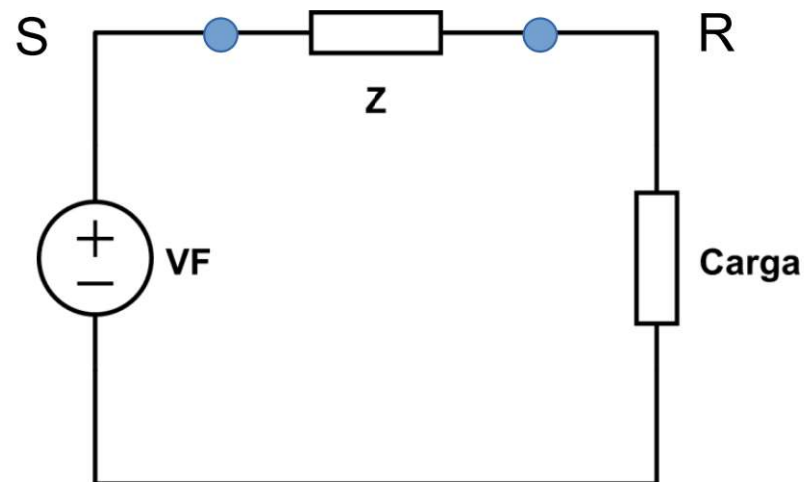
A representação usando quadripolos será:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$



Linha Curta ($L_{km} < 80$ km)

Para modelar essa LT por sua matriz Y_{node} consideramos que ambas **as correntes tem sentido entrando na LT**, o que significa inverter o sentido de I_R em relação ao que tinha sido adotado antes:



$$\begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} = Y_S \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ V_R \end{bmatrix}$$

$$Y_S = \frac{1}{Z} = \frac{1}{z_1 L_{km}}$$



Linha Curta ($L_{km} < 80$ km)

Para modelar essa LT por sua matriz Y , consideramos que ambas as correntes tem sentido de I_R em relação ao o

Atenção:

Em todos os modelos de quadripolo, a corrente no terminal R é considerada saindo da LT e alimentando a carga.

Em todos os modelos de admitância nodal, a corrente no terminal R é considerada entrando na LT, como se estivesse vindo da carga.

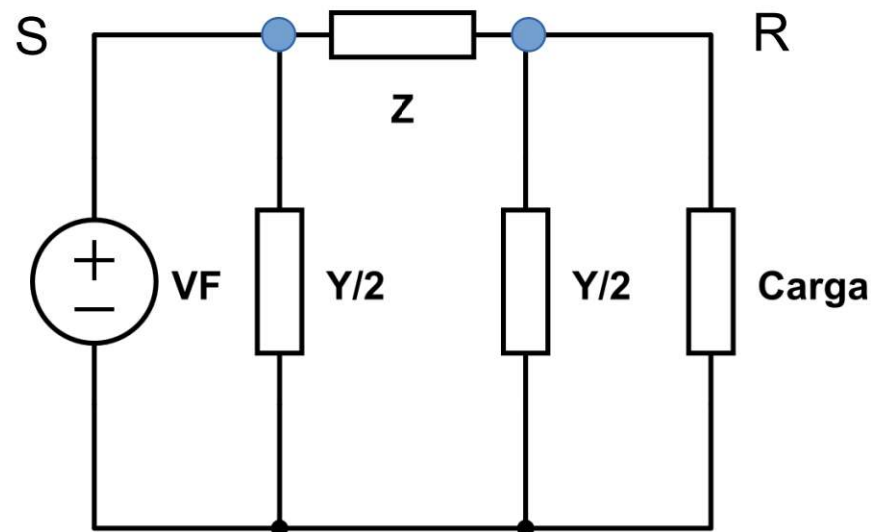
$$\begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} = Y_S \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ V_R \end{bmatrix}$$

$$Y_S = \frac{1}{Z} = \frac{1}{z_1 L_{km}}$$



Linha Média ($80 \text{ km} \leq L_{\text{km}} < 240 \text{ km}$)

Considere S como o terminal da fonte e R como o terminal da carga:



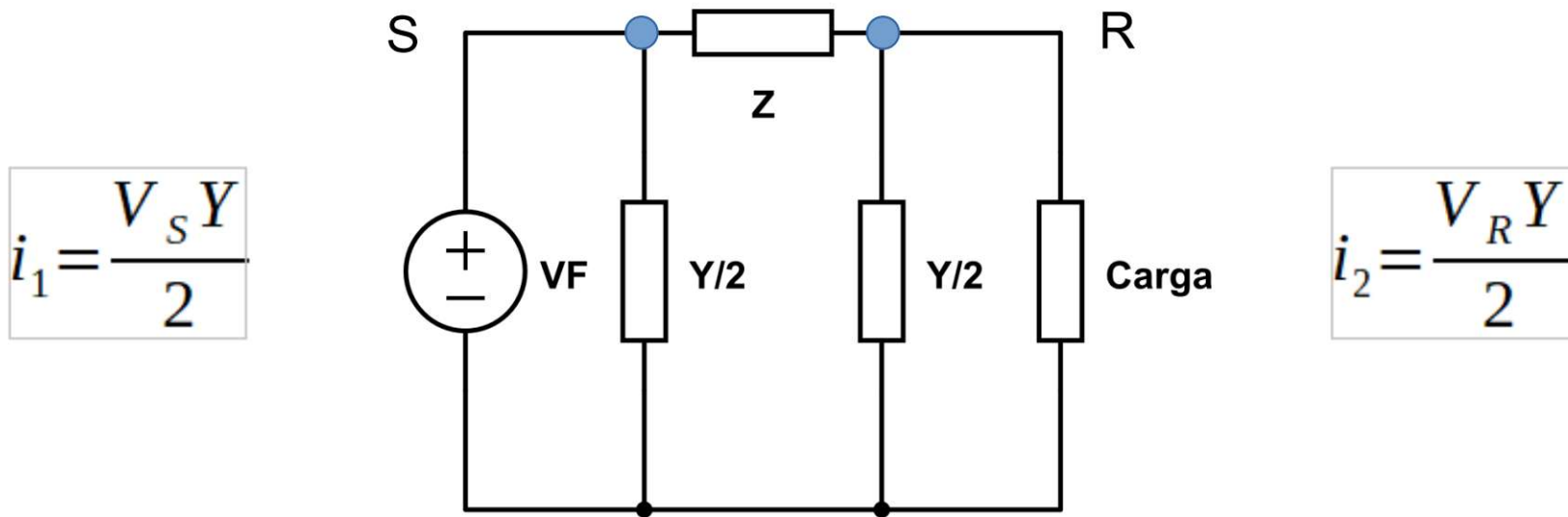
Z e Y são obtidos diretamente multiplicando os parâmetros de sequência positiva da LT em Ω/km e S/km pelo comprimento da LT. **OBS: subscrito 1 foi omitido.**

Esse modelo é chamado de **Circuito PI-nominal** da LT.



Linha Média ($80 \text{ km} \leq L_{\text{km}} < 240 \text{ km}$)

Novamente adotando I_S entrando na LT e I_R suprimindo a carga, podemos determinar o quadripolo que representa essa LT. Considere que descem correntes i_1 e i_2 nos dois circuitos em derivação, podemos escrever:



Desse modo, tomando o nó R:

$$\frac{V_S - V_R}{Z} = I_R + \frac{V_R Y}{2} \quad \rightarrow \quad V_S = \left[\frac{ZY}{2} + 1 \right] V_R + [Z] I_R$$



Linha Média ($80 \text{ km} \leq L_{\text{km}} < 240 \text{ km}$)

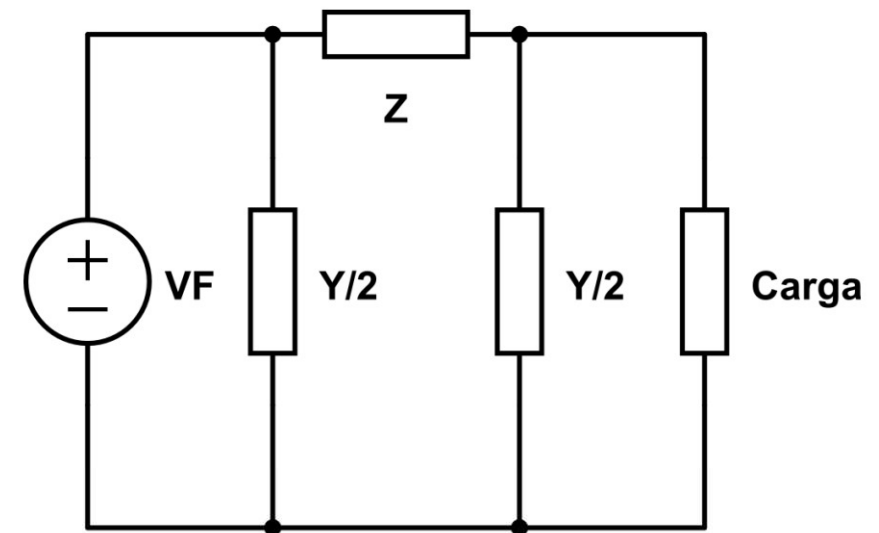
Desse modo, tomando o nó S:

$$I_S - \frac{V_S Y}{2} = I_R + \frac{V_R Y}{2}$$

$$I_S = \frac{V_S Y}{2} + I_R + \frac{V_R Y}{2}$$

Substituindo V_S :

$$I_S = \left[Y \left(\frac{ZY}{4} + 1 \right) \right] V_R + \left[\frac{ZY}{2} + 1 \right] I_R$$





Linha Média (80 km $\leq L_{km} < 240$ km)

Organizando as equações de forma matricial, obtemos o Quadripolo da LT:

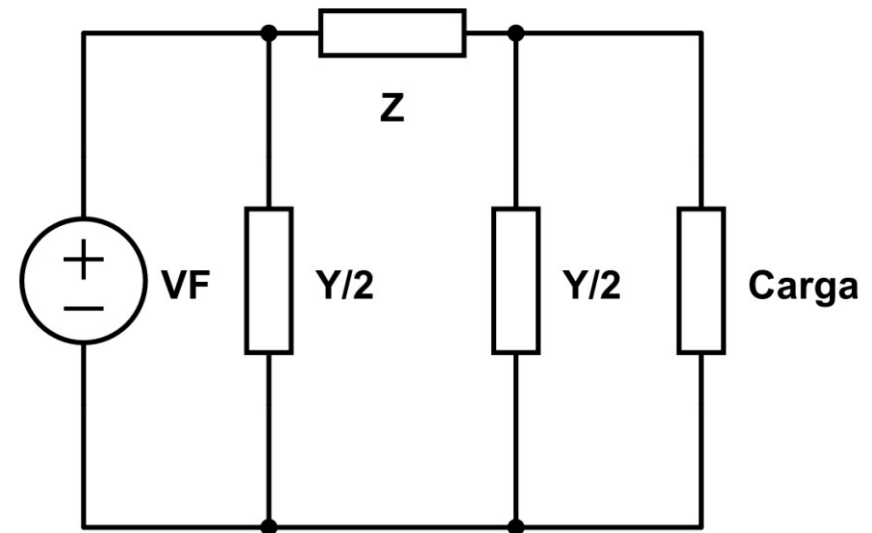
$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

Em que:

$A=D=1+ZY/2$ não tem dimensão.

$B = Z$ é uma grandeza em Ω .

$C = Y(ZY/4 + 1)$ é uma grandeza em S.



Como fica a matriz Y_{node} ?



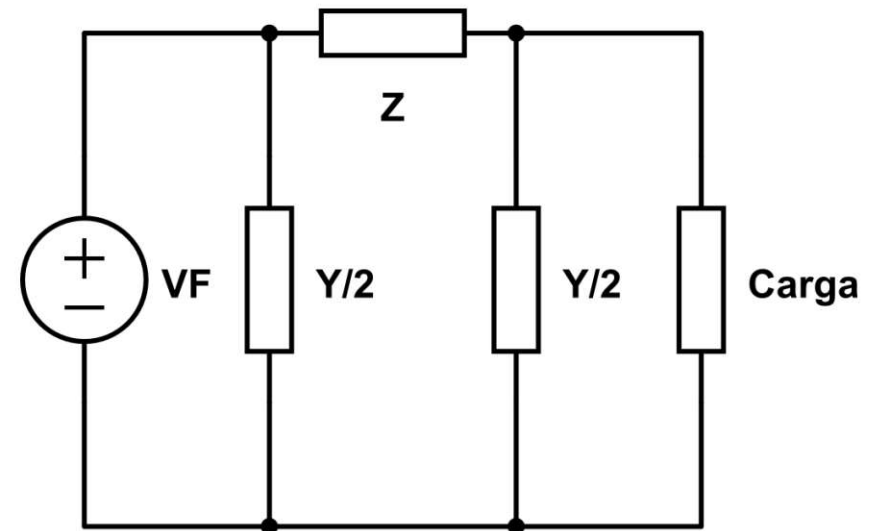
Linha Média ($80 \text{ km} \leq L_{\text{km}} < 240 \text{ km}$)

A representação dessa LT usando a matriz Y_{node} é direta, mas exige que o sentido de I_R seja definido entrando na LT:

$$\begin{bmatrix} I_S \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_S + \frac{Y}{2} & -Y_S \\ -Y_S & Y_S + \frac{Y}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_S \\ V_R \end{bmatrix}$$

$$Y_S = \frac{1}{Z} = \frac{1}{z_1 L_{\text{km}}}$$

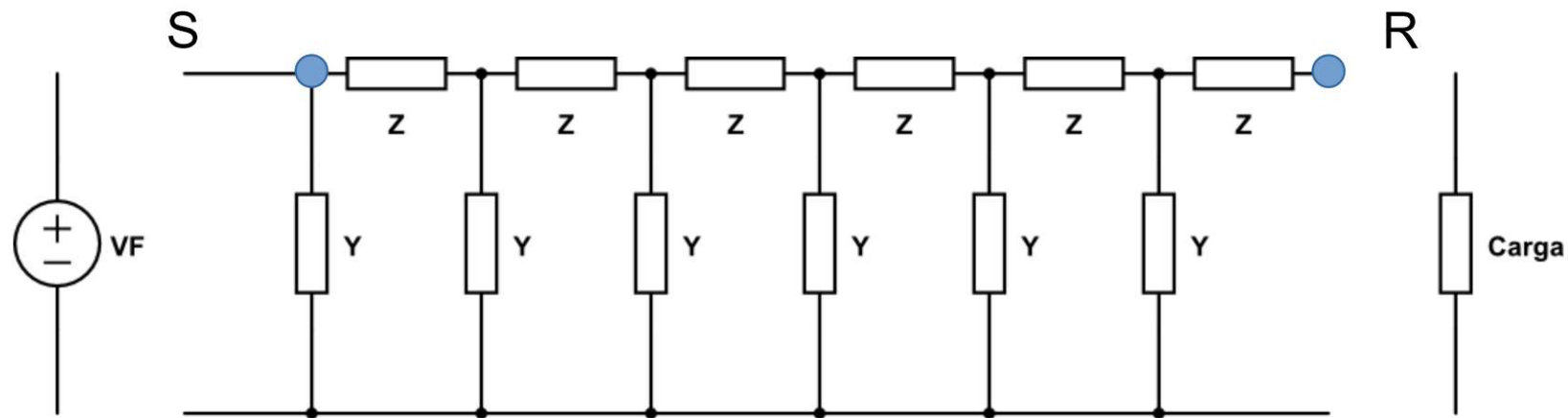
$$\frac{Y}{2} = \frac{y_1 L_{\text{km}}}{2}$$





Linha Longa ($L_{km} \geq 240$ km)

Novamente, considere S como o terminal da fonte e R como o terminal da carga:



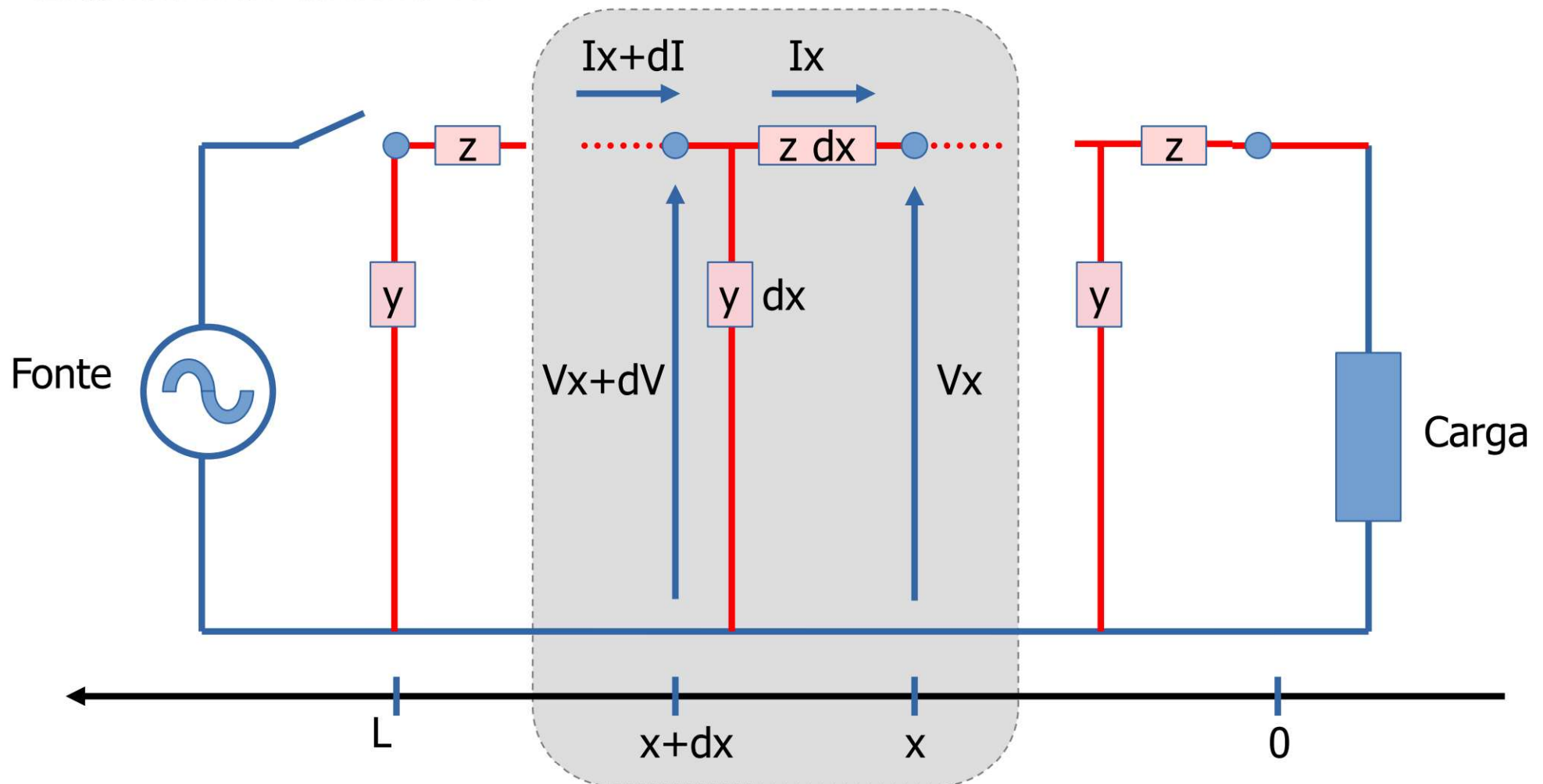
A partir de 240 km é necessário considerar a natureza distribuída inerente aos parâmetros da LT.

A única alternativa é partir para o cálculo diferencial e integral, em que podemos considerar efetivamente os parâmetros como **distribuídos**.



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Considere um segmento de largura infinitesimal dx de uma LT, posicionado a uma distância x do terminal R:





Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

A corrente que percorre a impedância série:

$$I_x = \frac{(V_x + dV) - V_x}{z_1 dx}$$

$$dV = z_1 I_x dx$$

$$\frac{dV}{dx} = z_1 I_x$$

A corrente em derivação:

$$(V_x + dV) y_1 dx = dI$$

$$y_1 V_x dx + y_1 dV dx = dI$$

Desprezando o produto de termos infinitesimais:

$$\frac{dI}{dx} = y_1 V_x$$



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Desse modo, duas expressões descrevem o comportamento da LT:

$$\frac{dV}{dx} = z_1 I_x$$

$$\frac{dI}{dx} = y_1 V_x$$

Derivando novamente com relação a variável x :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = z_1 \frac{dI}{dx}$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = y_1 \frac{dV}{dx}$$



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Substituindo as expressões originais:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = z_1 y_1 V$$
$$\frac{d^2 I}{dx^2} = y_1 z_1 I$$

Observe...

A solução é uma função tal que sua segunda derivada é igual a ela mesma multiplicada por uma constante.

Que família de funções tem essa característica?



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Que família de funções tem essa característica?

O pensamento natural é a função exponencial.

Por exemplo:

$$f = Ae^{bx} \rightarrow f' = bAe^{bx} \rightarrow f'' = b^2 Ae^{bx}$$

Derivar a função f duas vezes resulta nela mesma vezes b ao quadrado!



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Aplicando ao nosso caso, temos que a constante b ao quadrado seria igual ao produto $z_1 y_1$. Portanto, há duas possibilidades que atendem a essa igualdade.

A função sugerida é formada por uma soma ponderada das candidatas:

$$V_x = A_1 e^{\sqrt{z_1 y_1} x} + A_2 e^{-\sqrt{z_1 y_1} x}$$

Criar uma candidata para a tensão da linha, imediatamente gera uma corrente:

$$\frac{dV}{dx} = z_1 I_x \rightarrow I_x = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{z_1}{y_1}}} e^{\sqrt{z_1 y_1} x} - \frac{A_2}{\sqrt{\frac{z_1}{y_1}}} e^{-\sqrt{z_1 y_1} x}$$



Linha Longa ($L_{\text{km}} \geq 240 \text{ km}$)

Definindo:

Impedância Característica da LT (em Ω) $\rightarrow$

$$Z_c = \sqrt{\frac{z_1}{y_1}}$$

Constante de Propagação (em km^{-1}) $\rightarrow$

$$\gamma = \sqrt{z_1 y_1}$$

Podemos reescrever as equações candidatas da tensão e corrente ao longo da LT:

$$V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$
$$I(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{-\gamma x}$$



Linha Longa ($L_{km} \geq 240$ km)

Antes de prosseguir, vamos analisar o que descobrimos até agora...

$$V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$
$$I(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{-\gamma x}$$

Tensões e correntes na LT variam em função de x . Pegando um certo tempo t , temos tensões e correntes variáveis ao longo da LT.

Como é possível? Não é só um fio?

As tensões e correntes além de serem variáveis em função de x , são formadas por dois termos exponenciais.

O expoente do 1º termo é positivo e o do 2º termo é negativo.



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Vamos determinar as constantes A_1 e A_2 , como funções das grandezas dos terminais da LT.

Considerando que as expressões devem ser válidas para todo x , quatro condições de contorno podem ser escritas.

Quando $x = 0$:

$$V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{-\gamma x}$$

$$V_R = V(0) = A_1 + A_2$$

$$I_R = I(0) = \frac{A_1}{Z_c} - \frac{A_2}{Z_c}$$



Linha Longa ($L_{km} \geq 240$ km)

Quando $x = L_{km}$:

$$V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{A_1}{Z_c} e^{\gamma x} - \frac{A_2}{Z_c} e^{-\gamma x}$$

$$V_S = V(L) = A_1 e^{\gamma l} + A_2 e^{-\gamma l}$$

$$I_S = I(L) = \frac{A_1}{Z_c} e^{\gamma l} - \frac{A_2}{Z_c} e^{-\gamma l}$$



Linha Longa ($L_{km} \geq 240 \text{ km}$)

Observe que são 4 equações escritas com base em A_1 e A_2 . Qualquer 2 dessas equações permite resolver o sistema...

Supondo que sabemos V_R e I_R , a solução para A_1 e A_2 gera:

$$V_x = \left[\frac{V_R + Z_c I_R}{2} \right] e^{\gamma x} + \left[\frac{V_R - Z_c I_R}{2} \right] e^{-\gamma x}$$

$$I_x = \left[\frac{\frac{V_R}{Z_c} + I_R}{2} \right] e^{\gamma x} - \left[\frac{\frac{V_R}{Z_c} - I_R}{2} \right] e^{-\gamma x}$$

Um exemplo pode ajudar...



Exemplo 1: Linha Longa

Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.

Os parâmetros por km dessa LT são os seguintes:

$$z_1 = 0.524 \angle 79.04^\circ \text{ ohms/km}$$

$$y_1 = 3.1703 \angle 90^\circ \mu\text{S/km}$$

O comprimento dessa LT é de 370 km.

Estamos supondo que o terminal R está em aberto com tensão nominal, logo:

$$V_R = 215/\sqrt{3} \text{ @ } 0^\circ \text{ kV e } I_R = 0 \text{ A.}$$

ATENÇÃO: Observe que a tensão é eficaz fase-terra.

Calcule as tensões e correntes ao longo dessa LT.



Exemplo 1: Linha Longa

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0.524 \angle 79.04^\circ}{3.1703 \cdot 10^{-6} \angle 90^\circ}} = 406.5514 \angle -5.48^\circ \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{zy} = 0.000123 + 0.001283i = 1.2889 \cdot 10^{-3} \angle 84.52^\circ \text{ km}^{-1}$$

$$V(x) = 62.0652 \left(e^{(0.000123 + 0.001283i)x} + e^{-(0.000123 + 0.001283i)x} \right) \text{ kV}$$

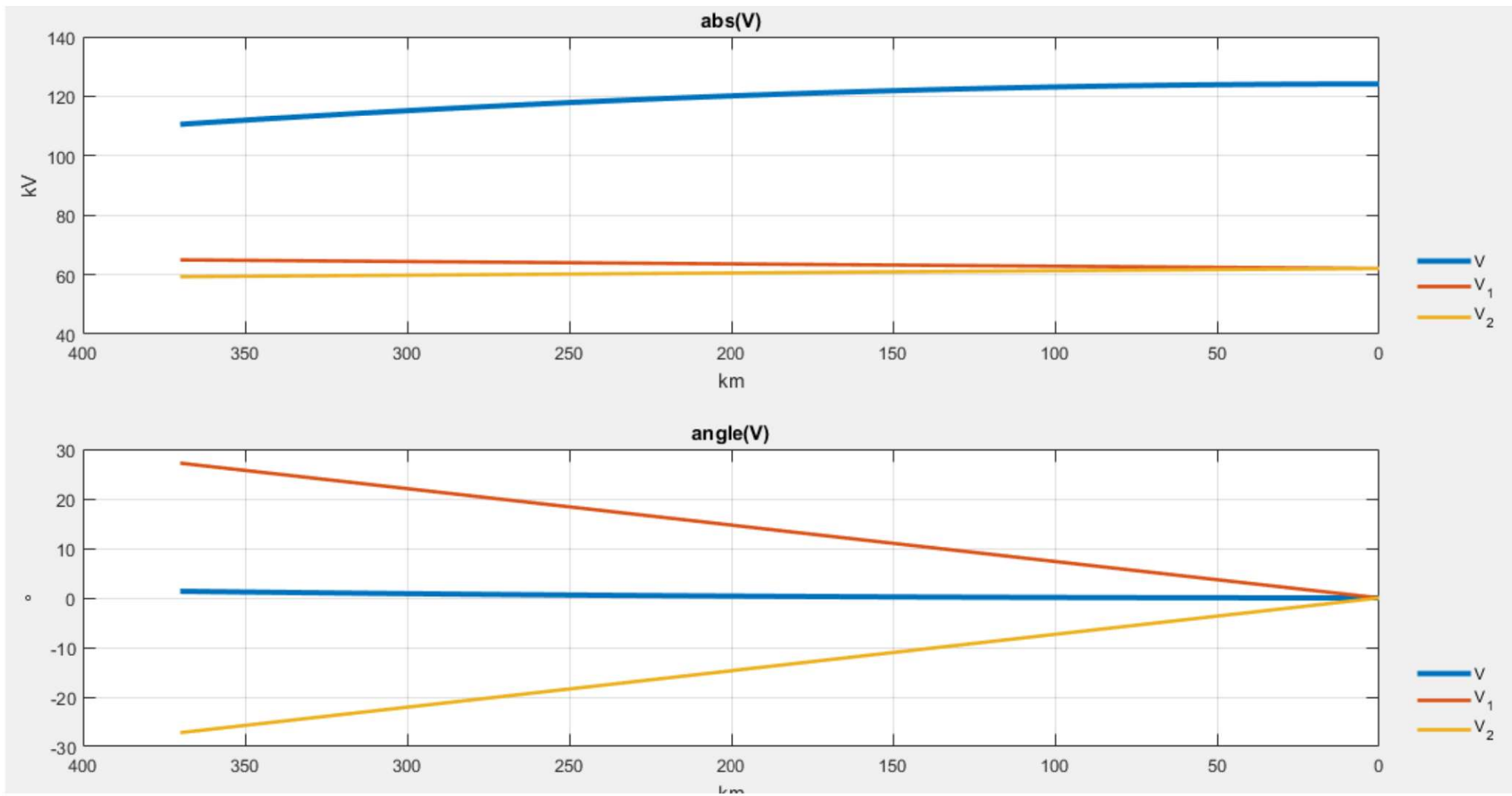
$$I(x) = (151.9648 + 14.5790i) \left(e^{(0.000123 + 0.001283i)x} - e^{-(0.000123 + 0.001283i)x} \right) \text{ A}$$

Para cada x de interesse, é possível calcular V e I .

Como ficaria calculando V e I para todas as posições?



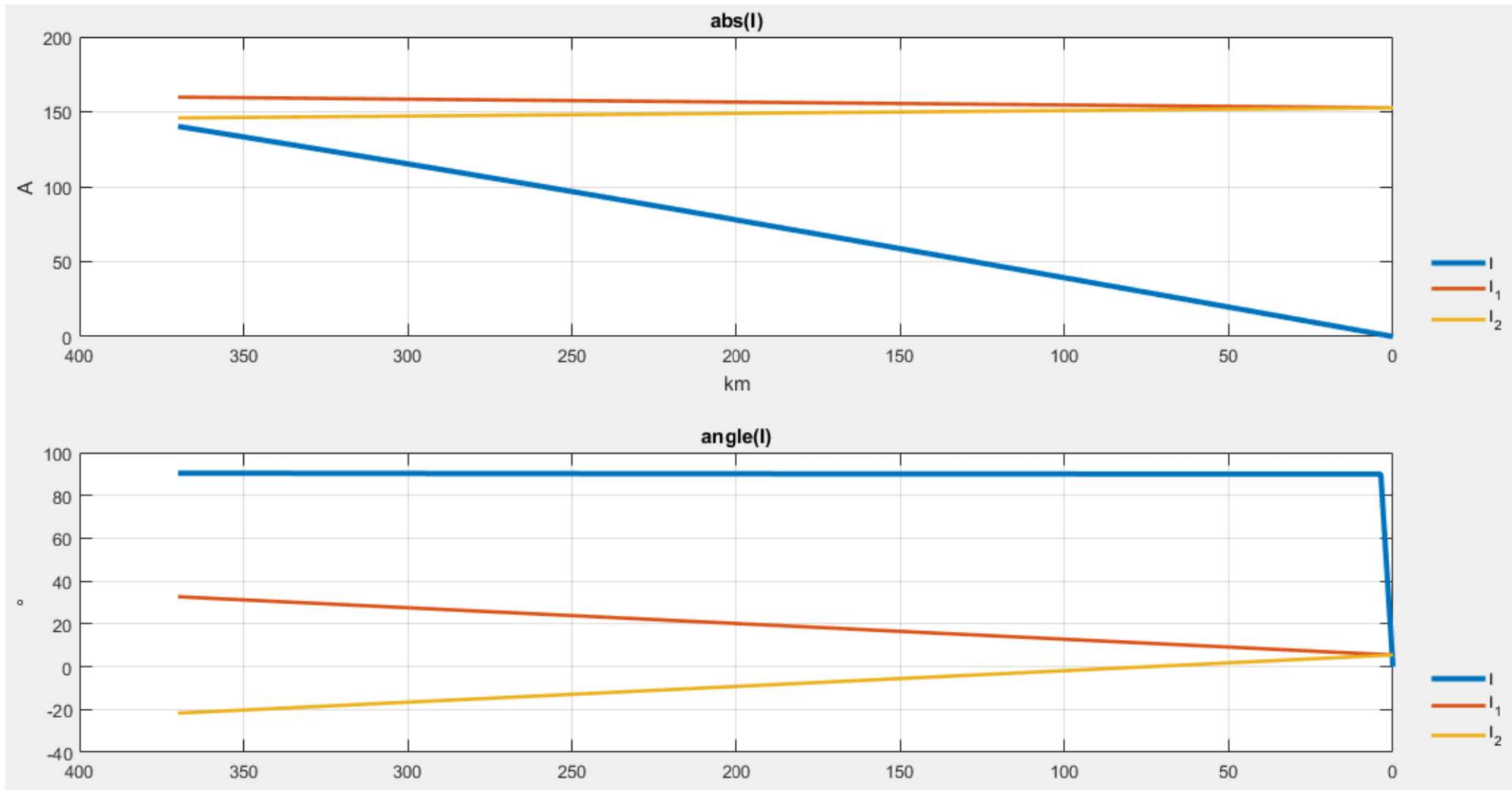
Exemplo 1: Linha Longa



Efeito Ferranti.



Exemplo 1: Linha Longa



Observe o módulo e fase da corrente no terminal S.



Exemplo 2: Linha Longa

Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.

Os parâmetros por km dessa LT são os seguintes:

$$z_1 = 0.524 \angle 79.04^\circ \text{ ohms/km}$$

$$y_1 = 3.1703 \angle 90^\circ \mu\text{S/km}$$

O comprimento dessa LT é de 370 km.

Estamos supondo que o terminal R alimenta uma carga de 125 MW com fator de potência unitário e tensão nominal, logo:

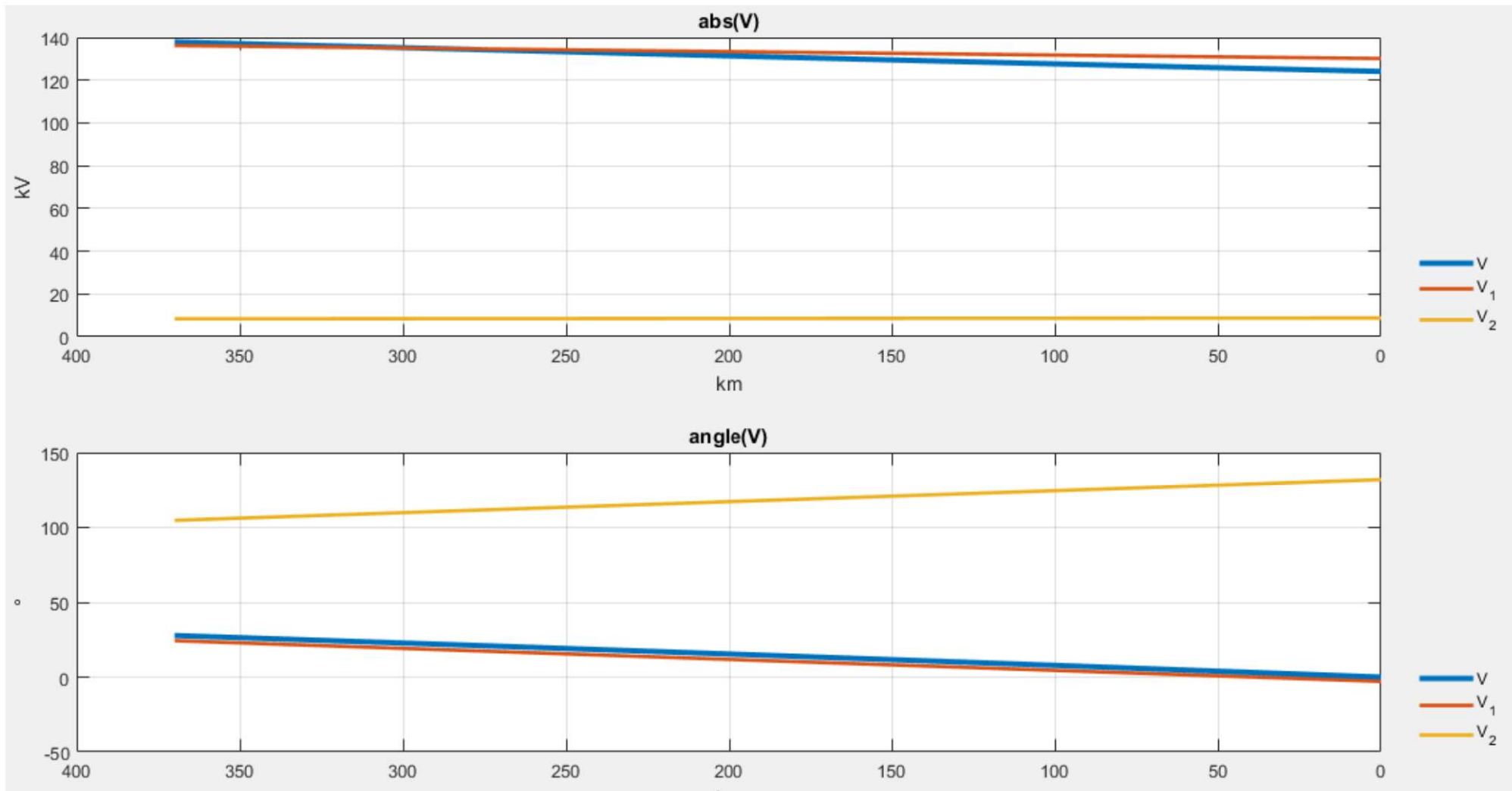
$$V_R = 215/\sqrt{3} \text{ @ } 0^\circ \text{ kV e } I_R = 125000 / (\sqrt{3} * 215) = 335.67 \text{ @ } 0^\circ \text{ A.}$$

ATENÇÃO: Observe que a tensão é eficaz fase-terra.

Calcule as tensões e correntes ao longo dessa LT.



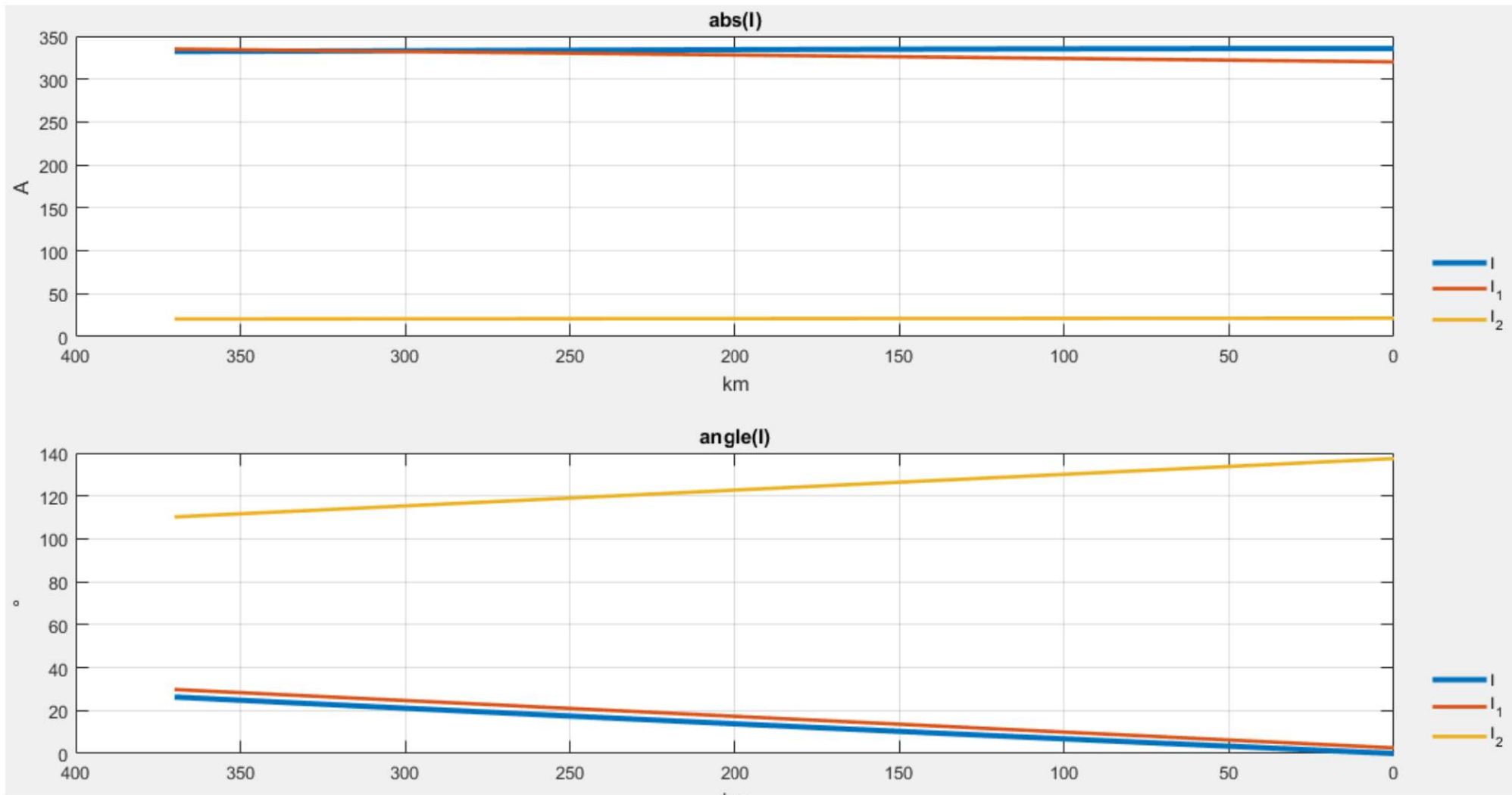
Exemplo 2: Linha Longa



Observe V_2 . Analise a equação da tensão em função de x : $V(x)$.



Exemplo 2: Linha Longa



Observe I_2 . Analise a equação da corrente em função de x : $I(x)$.



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

As equações obtidas até esse ponto são úteis na modelagem da LT para qualquer ponto x definido ao longo de seu comprimento.

Porém, é comum nas análises de regime permanente restringir o interesse apenas aos terminais da LT.

Nesse contexto, podemos obter um modelo simplificado para a LT-Longa.

O ponto de partida é a definição de seno e cosseno hiperbólicos.

Por definição:

$$\sinh(\theta) = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh(\theta) = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

Repetindo a equação obtida para as tensões ao longo da LT, com V_R e I_R tomadas como referência:

$$V(x) = \left[\frac{V_R + Z_c I_R}{2} \right] e^{\gamma x} + \left[\frac{V_R - Z_c I_R}{2} \right] e^{-\gamma x}$$

Podemos reescrever sem simplificações:

$$V(x) = V_R \left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) + Z_c I_R \left(\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right)$$

Logo:

$$V(x) = V_R \cosh(\gamma x) + Z_c I_R \sinh(\gamma x)$$



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

De modo semelhante, obtemos para a corrente:

$$I(x) = I_R \cosh(\gamma x) + \frac{V_R}{Z_c} \sinh(\gamma x)$$

Aplicando essas expressões fazendo $x = L_{km}$, é possível obter o quadripolo da LT:

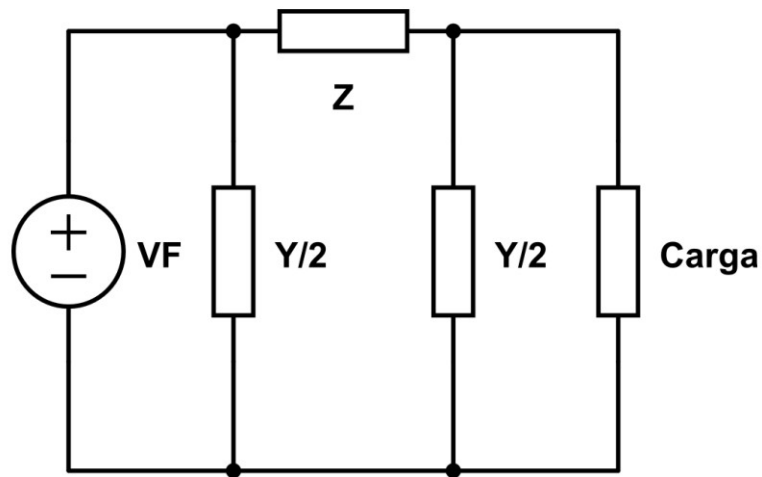
$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_c \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_c} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

Isto é, podemos relacionar diretamente as grandezas dos terminais!



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

No desenvolvimento do modelo de LT-Média, partimos de um circuito PI com impedância série Z e admitâncias em derivação $Y/2$ e obtivemos o quadripolo resultante:



$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY}{2} & Z \\ Y \left(\frac{ZY}{4} + 1 \right) & 1 + \frac{ZY}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

Agora, temos um quadripolo que representa uma LT-Longa.

Será que podemos criar um circuito PI que matematicamente seja equivalente ao modelo elétrico da LT-Longa?



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

Será que podemos criar um circuito PI que matematicamente seja equivalente ao modelo elétrico da LT-Longa?

Seria preciso encontrar Z e $Y/2$ de um circuito PI **fictício** que gerassem exatamente o mesmo quadripolo da LT-Longa...

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY}{2} & Z \\ Y\left(\frac{ZY}{4} + 1\right) & 1 + \frac{ZY}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_c \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_c} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

Para garantir a igualdade no termo (1, 2), basta fazer:

$$Z = Z_c \sinh(\gamma l)$$



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

De posse desse valor e tomando agora o elemento (1, 1):

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY}{2} & Z \\ Y \left(\frac{ZY}{4} + 1 \right) & 1 + \frac{ZY}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_c \sinh(\gamma l) \\ \frac{\sinh(\gamma l)}{Z_c} & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$1 + \frac{ZY}{2} = \cosh(\gamma l) \Rightarrow 1 + \frac{Z_c \sinh(\gamma l) Y}{2} = \cosh(\gamma l)$$

$$\frac{Y}{2} = \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{Z_c \sinh(\gamma l)}$$

Que pode ser reescrita tirando proveito das identidades hiperbólicas:

$$\frac{Y}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$$



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

Adotando $Z = Z_c \sinh(\gamma l)$ e $\frac{Y}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$ os termos (1, 1), (1, 2) e (2, 2) ficam exatamente iguais.

Fica a cargo do aluno conferir que substituindo esses valores ocorre correspondência exata no termo (2, 1) também.

A conclusão é que existe um circuito PI com parâmetros concentrados que modela a linha de transmissão longa de forma exata.



Linha Longa: Modelo PI Equivalente

Esse circuito PI é apenas matemático, mas gera exatamente o mesmo quadripolo da LT-Longa, portanto é **equivalente** ao circuito original.

O modelo da LT-Longa em termos de Matriz Admitância Nodal pode ser obtido diretamente do **PI Equivalente**:

$$Y_{\text{node}} = \begin{bmatrix} Y_s + Y/2 & -Y_s \\ -Y_s & Y_s + Y/2 \end{bmatrix}$$

$$Z = Z_c \sinh(\gamma l)$$

$$\frac{Y}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$$



Exemplo 3: Linha Longa

Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.

Os parâmetros por km são os seguintes:

$$z_1 = 0.524 \angle 79.04^\circ \text{ ohms/km}$$

$$y_1 = 3.1703 \angle 90^\circ \mu\text{S/km}$$

O comprimento dessa LT é de 370 km.

Calcule:

- a) O modelo PI Equivalente dessa LT.
- b) Se inadvertidamente fosse usado o modelo PI Nominal, qual teria sido o erro percentual em cada um dos termos da matriz Y_{nodal} ?



Exemplo 3: Linha Longa

Resposta:

```
%% ASE
% Exercício 3 - Aula 05

clear variables;
clc;

Complexo = @(m,f) m*exp(1j*f*pi/180);

%% Enunciado:
%
% Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.
%
% Os parâmetros por km são os seguintes:
%
% z1 = 0.524 @ 79.04° ohms/km
%
% y1 = 3.1703 @ 90° μS/km
%
% O comprimento dessa LT é de 370 km.
```



Exemplo 3: Linha Longa

Resposta:

```
%  
% Calcule:  
%  
% a) O modelo PI Equivalente dessa LT.  
%  
% b) Se inadvertidamente fosse usado o modelo PI Nominal, qual teria sido  
%     o erro percentual em cada um dos termos da matriz Ynodal?  
  
%% Respostas - Letra a  
  
z1 = Complexo(0.5240,79.04);           % ohms/km  
y1 = Complexo(3.1703e-6,90.00);        % S/km  
Lkm = 370;                             % km  
  
Zc = sqrt(z1 / y1);                    % ohms  
gama = sqrt(z1 * y1);                  % km^-1  
  
Zs = Zc * sinh(gama * Lkm);            % ohms  
meioY = tanh(gama * Lkm / 2) / Zc;     % S
```



Exemplo 3: Linha Longa

```

fprintf('\n');
fprintf('Resultado do Exercício 2 - Aula 5 - ASE\n');
fprintf('\n');
fprintf('a)\n');
fprintf('\n');
fprintf('Zs = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) ohms.\n', ...
    real(Zs), imag(Zs), abs(Zs), angle(Zs)*180/pi);
fprintf('Y/2 = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) uS.\n', ...
    1e6*real(meioY), 1e6*imag(meioY), 1e6*abs(meioY), angle(meioY)*180/pi);
fprintf('\n');
fprintf('Em que:\n');
fprintf('
                                Zs
                                \n');
fprintf('
    o--+-----|xxxxxxxxxx|-----+--o
                                \n');
fprintf('
        |                                |
                                \n');
fprintf('
        |                                |
                                \n');
fprintf('
        |x|                            |x|
                                \n');
fprintf('
    Y/2 |x|                            |x| Y/2
                                \n');
fprintf('
        |x|                            |x|
                                \n');
fprintf('
        |                                |
                                \n');
fprintf('
        |                                |
                                \n');
fprintf('-----+-----+-----+-----\n');
fprintf('\n');
    
```



Exemplo 3: Linha Longa

Resposta:

```
%% Respostas - Letra b

Ys = 1 / Zs;
Ynodal_pi_equiv = [Ys+meioY -Ys;-Ys Ys+meioY];

Ys = 1 / (z1 * Lkm);
meioY = y1 * Lkm / 2;
Ynodal_pi_nom = [Ys+meioY -Ys;-Ys Ys+meioY];

erro = 100 * (Ynodal_pi_nom ./ Ynodal_pi_equiv - 1);

fprintf('b)\n');
fprintf('\n');
fprintf('erro(1,1) = %10.4f %%\n', erro(1,1));
fprintf('erro(1,2) = %10.4f %%\n', erro(1,2));
fprintf('erro(2,1) = %10.4f %%\n', erro(2,1));
fprintf('erro(2,2) = %10.4f %%\n', erro(2,2));
fprintf('\n');
```



Exemplo 3: Linha Longa

Resposta:

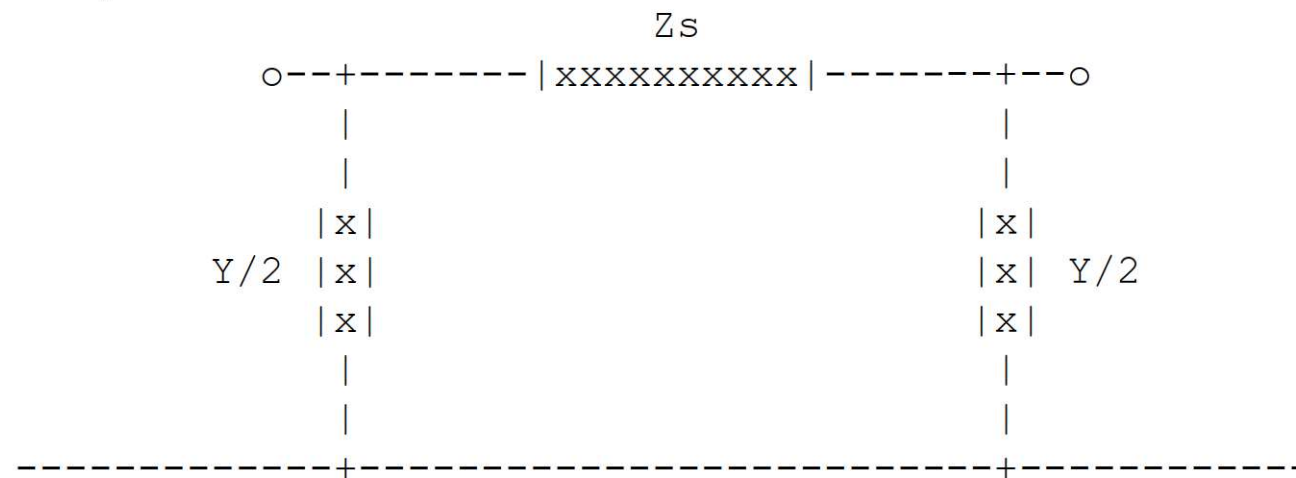
Resultado do Exercício 2 - Aula 5 - ASE

a)

$$Z_s = (34.1628, 183.5960) \text{ ou } (186.7474 @ 79.4592) \text{ ohms.}$$

$$Y/2 = (2.2109, 597.6577) \text{ ou } (597.6618 @ 89.7880) \text{ uS.}$$

Em que:





Exemplo 3: Linha Longa

Resposta:

Resultado do Exercício 2 - Aula 5 - ASE

b)

`erro(1,1) = -3.8948 %.`

`erro(1,2) = -3.6815 %.`

`erro(2,1) = -3.6815 %.`

`erro(2,2) = -3.8948 %.`



Exemplo 4: Linha Longa

Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.

Os parâmetros por km são os seguintes:

$$z_1 = 0.524 \angle 79.04^\circ \text{ ohms/km}$$

$$y_1 = 3.1703 \angle 90^\circ \mu\text{S/km}$$

O comprimento dessa LT é de 370 km.

Retomando o exemplo 2, considere que o terminal R alimenta uma carga de 125 MW com fator de potência unitário e tensão nominal.

Temos: $V_R = 215/\sqrt{3} \text{ @ } 0^\circ \text{ kV}$ e $I_R = 125 / (\sqrt{3} * 215) = 0.33567 \text{ @ } 0^\circ \text{ kA}$.

Calcule V_S , I_S e as perdas elétricas DS dessa LT.



Exemplo 4: Linha Longa

Resposta:

```
1 %% ASE
2 % Exercício 4 - Aula 05
3
4 - clear variables;
5 - clc;
6
7 - Complexo = @(m,f) m*exp(1j*f*pi/180);
8
9 %% Enunciado:
10 %
11 % Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.
12 %
13 % Os parâmetros por km são os seguintes:
14 %
15 %  $z_1 = 0.524 \angle 79.04^\circ$  ohms/km
16 %
17 %  $y_1 = 3.1703 \angle 90^\circ$   $\mu$ S/km
18 %
19 % O comprimento dessa LT é de 370 km.
```



Exemplo 4: Linha Longa

Resposta:

```
21 % Calcule:
22 %
23 % Retomando o exemplo 2, considere que o terminal R alimenta uma carga de
24 % 125 MW com fator de potência unitário e tensão nominal.
25 %
26 % Temos:
27 % VR = 215/raiz(3) @ 0° kV e
28 % IR = 125 / (raiz(3) * 215) = 0.33567 @ 0° kA.
29 %
30 % Calcule VS, IS e as perdas elétricas DS dessa LT.
31
32
33 %% Respostas
34
35 - z1 = Complexo(0.5240,79.04); % ohms/km
36 - y1 = Complexo(3.1703e-6,90.00); % S/km
37 - Lkm = 370; % km
38
39 - VR = 215/sqrt(3); % kV
40 - IR = 125 / (sqrt(3) * 215); % kA
```



Exemplo 4: Linha Longa

Resposta:

```
41
42 -   Zc = sqrt(zl / yl);           % ohms
43 -   gama = sqrt(zl * yl);        % km^-1
44
45 -   mat_quad = [
46           cosh(gama*Lkm)      Zc*sinh(gama*Lkm)
47           sinh(gama*Lkm)/Zc   cosh(gama*Lkm)
48   ];
49
50 -   aux = mat_quad * [VR; IR];
51
52 -   VS = aux(1);
53 -   IS = aux(2);
54
55 -   SSR = 3 * VS * conj(IS);
56 -   SRS = 3 * VR * conj(IR);
57 -   DS = SSR - SRS;
```



Exemplo 4: Linha Longa

Resposta:

```
59  %% Resultados
60
61 - fprintf('\n');
62 - fprintf('Resultado do Exercício 4 - Aula 5 - ASE\n');
63 - fprintf('\n');
64 - fprintf('VS  = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) kV.\n', ...
65         real(VS),imag(VS),abs(VS),angle(VS)*180/pi);
66 - fprintf('IS  = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) kA.\n', ...
67         real(IS),imag(IS),abs(IS),angle(IS)*180/pi);
68 - fprintf('VR  = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) kV.\n', ...
69         real(VR),imag(VR),abs(VR),angle(VR)*180/pi);
70 - fprintf('IR  = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) kA.\n', ...
71         real(IR),imag(IR),abs(IR),angle(IR)*180/pi);
72 - fprintf('SSR = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) MVA.\n', ...
73         real(SSR),imag(SSR),abs(SSR),angle(SSR)*180/pi);
74 - fprintf('SRS = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) MVA.\n', ...
75         real(SRS),imag(SRS),abs(SRS),angle(SRS)*180/pi);
76 - fprintf('DS  = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) MVA.\n', ...
77         real(DS),imag(DS),abs(DS),angle(DS)*180/pi);
78 - fprintf('\n');
```



Exemplo 4: Linha Longa

Resposta:

Resultado do Exercício 4 - Aula 5 - ASE

```
VS = ( 121.9866, 64.2123) ou ( 137.8548@ 27.7618) kV.  
IS = ( 0.2978, 0.1472) ou ( 0.3322@ 26.3056) kA.  
VR = ( 124.1303, 0.0000) ou ( 124.1303@ 0.0000) kV.  
IR = ( 0.3357, 0.0000) ou ( 0.3357@ 0.0000) kA.  
SSR = ( 137.3590, 3.4919) ou ( 137.4033@ 1.4562) MVA.  
SRS = ( 125.0000, 0.0000) ou ( 125.0000@ 0.0000) MVA.  
DS = ( 12.3590, 3.4919) ou ( 12.8428@ 15.7770) MVA.
```

Que tal desenhar?

Vale a pena desenhar o modelo PI-Equivalente...



Exemplo 4: Linha Longa - Extras

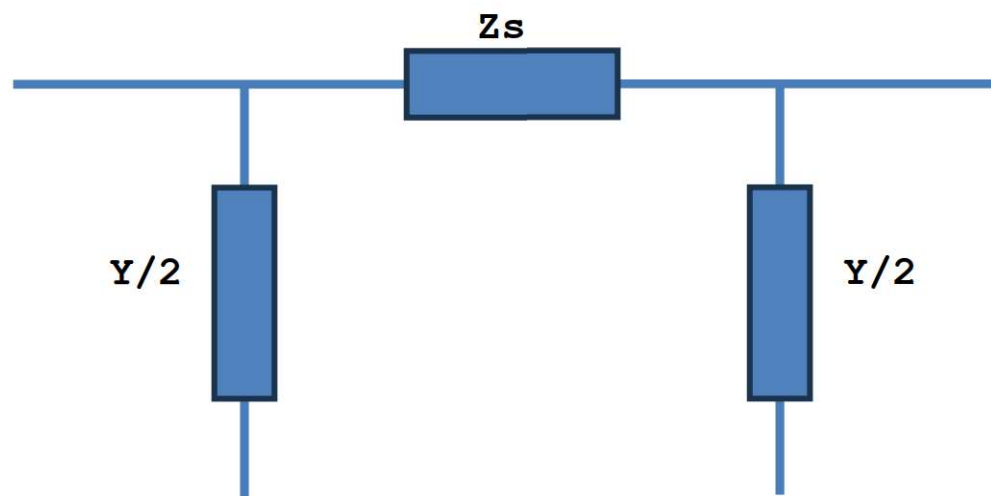
Adicionei novos resultados:

```
%% Novos Resultados
```

```
Zs = Zc * sinh(gama * Lkm); % ohms
```

```
meioY = tanh(gama * Lkm / 2) / Zc; % S
```

$Z_s = (34.1628, 183.5960) \text{ ou } (186.7474 @ 79.4592) \text{ ohms.}$
 $Y/2 = (2.2109, 597.6577) \text{ ou } (597.6618 @ 89.7880) \text{ uS.}$





Exemplo 4: Linha Longa - Extras

Correntes:

$$\begin{aligned} IS &= (0.2978, 0.1472) \text{ ou } (0.3322@ 26.3056) \text{ kA.} \\ IR &= (0.3357, 0.0000) \text{ ou } (0.3357@ 0.0000) \text{ kA.} \end{aligned}$$

```
Iserie = (VS - VR) / Zs;           % kA
Ish_esq = VS * meioY;             % kA
Ish_dir = VR * meioY;             % kA

Itotal_esq = IS - Iserie - Ish_esq; % kA
Itotal_dir = Iserie - IR - Ish_dir; % kA
```

$$\begin{aligned} Iserie &= (0.3359, 0.0742) \text{ ou } (0.3440@ 12.4529) \text{ kA.} \\ Ish_esq &= (-0.0381, 0.0730) \text{ ou } (0.0824@ 117.5498) \text{ kA.} \\ Ish_dir &= (0.0003, 0.0742) \text{ ou } (0.0742@ 89.7880) \text{ kA.} \\ Itotal_esq &= (0.0000, 0.0000) \text{ ou } (0.0000@ 38.6598) \text{ kA.} \\ Itotal_dir &= (-0.0000, -0.0000) \text{ ou } (0.0000@ -132.5914) \text{ kA.} \end{aligned}$$



Exemplo 4: Linha Longa - Extras

Potências:

SSR = (137.3590, 3.4919) ou (137.4033@ 1.4562) MVA.
SRS = (125.0000, 0.0000) ou (125.0000@ 0.0000) MVA.
DS = (12.3590, 3.4919) ou (12.8428@ 15.7770) MVA.

```
DS_serie = 3 * Zs * abs(Iserie)^2;           % MVA
DS_sh_esq = 3 * abs(VS)^2 * conj(meioY);      % MVA
DS_sh_dir = 3 * abs(VR)^2 * conj(meioY);      % MVA
DS_total = DS_serie + DS_sh_esq + DS_sh_dir;  % MVA
```

DS_serie = (12.1307, 65.1921) ou (66.3112@ 79.4592) MVA.
DS_sh_esq = (0.1260, -34.0735) ou (34.0738@ -89.7880) MVA.
DS_sh_dir = (0.1022, -27.6267) ou (27.6269@ -89.7880) MVA.
DS_total = (12.3590, 3.4919) ou (12.8428@ 15.7770) MVA.



Exemplo 4: Linha Longa - Extras

Observe que a lei das correntes foi respeitada!

Conservação de energia também!

Entendeu a presença do número 3 em algumas equações?

Os resultados estão coerentes?

Houve alguma violação de tensão?

Houve alguma violação de corrente? Adote condutores comumente usados...

Essa LT opera com carga leve ou carga pesada?

O que muda no cálculo se o sistema pu for escolhido?



Exemplo 5: Linha Longa

Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.

Os parâmetros por km são os seguintes:

$$z_1 = 0.524 \angle 79.04^\circ \text{ ohms/km}$$

$$y_1 = 3.1703 \angle 90^\circ \mu\text{S/km}$$

O comprimento dessa LT é de 370 km.

Retomando o exemplo 2, considere que o terminal R alimenta uma carga de 125 MW com fator de potência unitário e tensão nominal.

Temos: $V_R = 215/\sqrt{3} \text{ @ } 0^\circ \text{ kV}$ e $I_R = 125 / (\sqrt{3} * 215) = 0.33567 \text{ @ } 0^\circ \text{ kA}$.

Calcule V_S , I_S e as perdas elétricas DS dessa LT, usando o sistema pu:
SB = 100 MVA e VB = 215 kV.



Exemplo 5: Linha Longa

Resposta:

```
1 %% ASE
2 % Exercício 5 - Aula 05
3
4 - clear variables;
5 - clc;
6
7 - Complexo = @(m,f) m*exp(1j*f*pi/180);
8
9 %% Enunciado:
10 %
11 % Considere a LT de 215 kV do exemplo 6.3 do Stevenson.
12 %
13 % Os parâmetros por km são os seguintes:
14 %
15 %  $z_1 = 0.524 @ 79.04^\circ$  ohms/km
16 %
17 %  $y_1 = 3.1703 @ 90^\circ$   $\mu$ S/km
18 %
19 % O comprimento dessa LT é de 370 km.
```



Exemplo 5: Linha Longa

Resposta:

```
21 % Calcule:
22 %
23 % Retomando o exemplo 2, considere que o terminal R alimenta uma carga de
24 % 125 MW com fator de potência unitário e tensão nominal.
25 %
26 % Temos:
27 %  $V_R = 215/\sqrt{3}$  @  $0^\circ$  kV e
28 %  $I_R = 125 / (\sqrt{3} * 215) = 0.33567$  @  $0^\circ$  kA.
29 %
30 % Calcule  $V_S$ ,  $I_S$  e as perdas elétricas  $D_S$  dessa LT, usando o sistema pu:
31 %  $S_B = 100$  MVA e  $V_B = 215$  kV.
32
33 %% Respostas
34
35 -  $S_B = 100;$  % MVA
36 -  $V_B = 215;$  % kV
37 -  $Z_B = V_B^2/S_B;$  % ohms
38 -  $Y_B = 1/Z_B;$  % S
39
40 -  $z_l = \text{Complexo}(0.5240, 79.04);$  % ohms/km
41 -  $y_l = \text{Complexo}(3.1703e-6, 90.00);$  % S/km
42 -  $L_{km} = 370;$  % km
```



Exemplo 5: Linha Longa

Resposta:

```
44 - VR_pu = 215/VB; % pu
45 - IR_pu = (125/SB) / VR_pu; % pu
46
47 - Zc_pu = sqrt(zl / yl) / ZB; % pu
48 - gama = sqrt(zl * yl); % km^-1
49
50 - mat_quad = [
51     cosh(gama*Lkm)  Zc_pu*sinh(gama*Lkm)
52     sinh(gama*Lkm)/Zc_pu  cosh(gama*Lkm)
53 ];
54
55 - aux = mat_quad * [VR_pu; IR_pu];
56
57 - VS_pu = aux(1);
58 - IS_pu = aux(2);
59
60 - SSR_pu = VS_pu * conj(IS_pu);
61 - SRS_pu = VR_pu * conj(IR_pu);
62 - DS_pu = SSR_pu - SRS_pu;
63
64 - SSR = SSR_pu * SB;
65 - SRS = SRS_pu * SB;
66 - DS = DS_pu * SB;
```



Exemplo 5: Linha Longa

```
68  %% Resultados
69
70 - fprintf('\n');
71 - fprintf('Resultado do Exercício 5 - Aula 5 - ASE\n');
72 - fprintf('\n');
73 - fprintf('VS_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
74         real(VS_pu), imag(VS_pu), abs(VS_pu), angle(VS_pu)*180/pi);
75 - fprintf('IS_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
76         real(IS_pu), imag(IS_pu), abs(IS_pu), angle(IS_pu)*180/pi);
77 - fprintf('VR_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
78         real(VR_pu), imag(VR_pu), abs(VR_pu), angle(VR_pu)*180/pi);
79 - fprintf('IR_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
80         real(IR_pu), imag(IR_pu), abs(IR_pu), angle(IR_pu)*180/pi);
81 - fprintf('SSR_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
82         real(SSR_pu), imag(SSR_pu), abs(SSR_pu), angle(SSR_pu)*180/pi);
83 - fprintf('SRS_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
84         real(SRS_pu), imag(SRS_pu), abs(SRS_pu), angle(SRS_pu)*180/pi);
85 - fprintf('DS_pu = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) pu.\n', ...
86         real(DS_pu), imag(DS_pu), abs(DS_pu), angle(DS_pu)*180/pi);
87 - fprintf('SSR = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) MVA.\n', ...
88         real(SSR), imag(SSR), abs(SSR), angle(SSR)*180/pi);
89 - fprintf('SRS = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) MVA.\n', ...
90         real(SRS), imag(SRS), abs(SRS), angle(SRS)*180/pi);
91 - fprintf('DS = (%10.4f,%10.4f) ou (%10.4f@%10.4f) MVA.\n', ...
92         real(DS), imag(DS), abs(DS), angle(DS)*180/pi);
93 - fprintf('\n');
```



Exemplo 5: Linha Longa

Resposta:

Resultado do Exercício 5 - Aula 5 - ASE

```
VS_pu = ( 0.9827, 0.5173) ou ( 1.1106@ 27.7618) pu.  
IS_pu = ( 1.1091, 0.5483) ou ( 1.2372@ 26.3056) pu.  
VR_pu = ( 1.0000, 0.0000) ou ( 1.0000@ 0.0000) pu.  
IR_pu = ( 1.2500, 0.0000) ou ( 1.2500@ 0.0000) pu.  
SSR_pu = ( 1.3736, 0.0349) ou ( 1.3740@ 1.4562) pu.  
SRS_pu = ( 1.2500, 0.0000) ou ( 1.2500@ 0.0000) pu.  
DS_pu = ( 0.1236, 0.0349) ou ( 0.1284@ 15.7770) pu.  
SSR = ( 137.3590, 3.4919) ou ( 137.4033@ 1.4562) MVA.  
SRS = ( 125.0000, 0.0000) ou ( 125.0000@ 0.0000) MVA.  
DS = ( 12.3590, 3.4919) ou ( 12.8428@ 15.7770) MVA.
```

Mesmo resultado!



Modelo Elétrico de Linhas de Transmissão

Modelo PI

Helon David de Macêdo Braz
helon@cear.ufpb.br